Un concesionario de automóviles de cierto tipo debe afrontar la previsible disminución de ventas y preparar su plan para este año. Sabe que si cada coche lo vende a 50 u ($1u=10^3$ €), venderá 40 vehículos y, luego de un estudio de mercado, también sabe que por cada 1u que rebaje ese precio en cada coche, el número de clientes aumentará en 5. El coste de fábrica de cada coche para este concesionario es de 35 u.

Se pide:

a) ***Expresar el importe de la venta de los coches que se venderían en función de la rebaja de x u que se aplique a cada vehículo.***
b) ***¿Cuál debe ser esta rebaja para que los resultados económicos sean los mejores posibles?***
c) ***En este caso, ¿cuál será el beneficio final?***

SOLUCIÓN:

a) Si hacemos una tabla "rebaja - importe del vehículo - vehículos vendidos", tendríamos:

Rebaja en u (x)	Importe del vehículo	Coches vendidos
0	50 u	40
1	49 u	45
2	48 u	50
...	...	...

Llamando x al número de u que rebajamos, el importe de cada vehículo sería (50-x)u, y el número de vehículos vendidos sería 40+5x, por tanto el importe total de la venta de los coches que se venderían, sería:

$$\mathbf{I(x) = (50-x)(40+5x)\ \ u\ \ =(-5x^2+210x+2000)\ \ u}$$

con la restricción de que $50-x>35$, es decir $\mathbf{x<15}$, ya que si es 15 el beneficio sería 0 y a partir de ahí comenzaríamos a perder dinero

b) Los resultados económicos serán los mejores posibles cuando I(x) sea máximo ya que el precio del auto para el concesionario no depende de x.

Derivando I(x), se obtiene $I'(x) = -10x+210$ que se anula para x=21, pero este resultado se sale del dominio útil de la función en el contexto del problema que son los enteros del intervalo [0, 15) (vimos en a) que x ha de ser menor que 15)

Como se trata de una función creciente de 0 a 21, el máximo lo alcanzaría dentro de nuestro dominio útil en 14, es decir vender cada coche a 36000 euros.

La rebaja en cada coche sería de 14 u o 14000 euros en vehículo

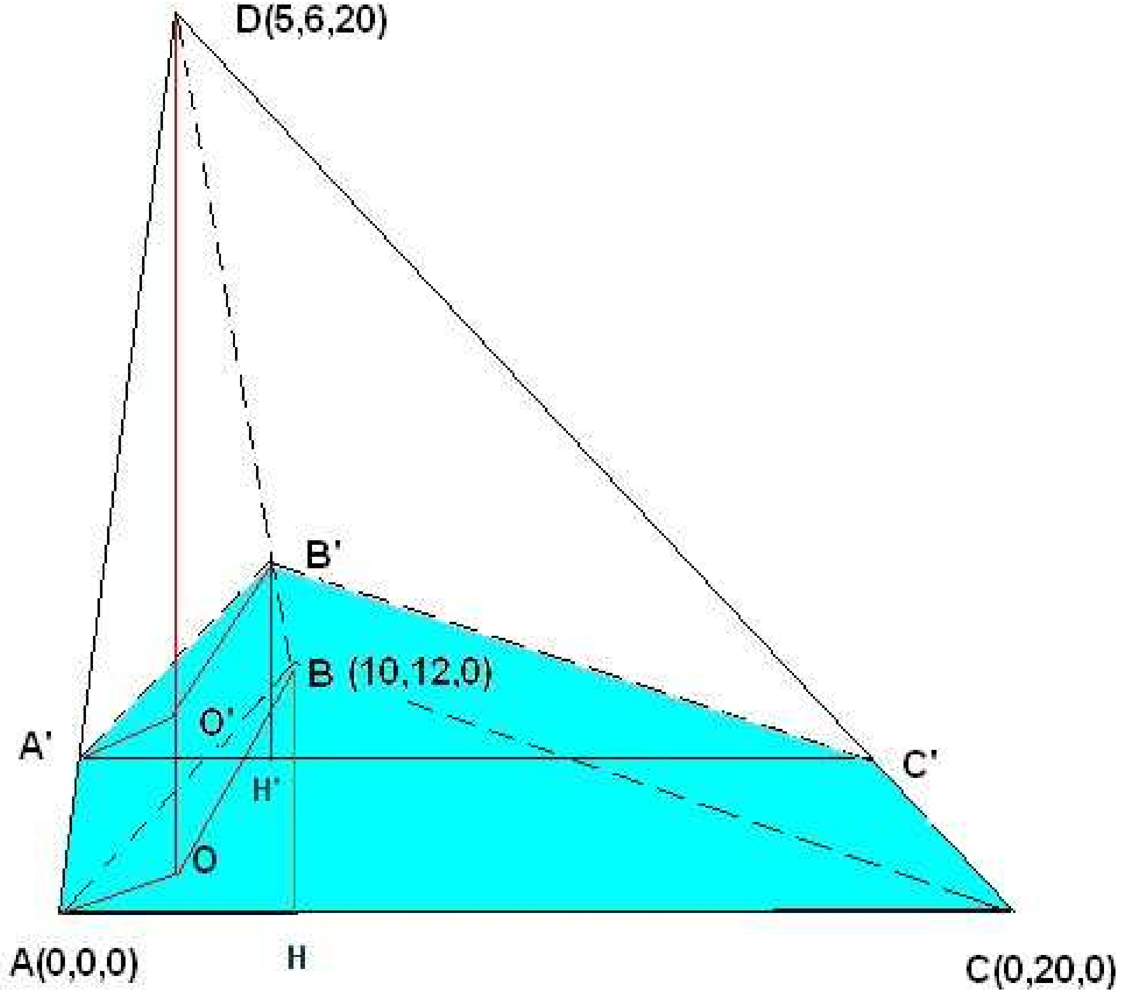
c) En este caso el número de coches vendidos serían 110 con los que se obtendría un importe por su venta de $-5.14^2+210.14+2000$ u, es decir 3960 u.

Dado que cada coche cuesta al concesionario 35 u y cada coche lo estamos vendiendo a 36 u ganamos 1u por coche. Como hemos vendido 110, el beneficio total son 110 u, es decir 110.000 €

Un depósito de agua tiene forma piramidal. Si sus vértices se sitúan sobre unos ejes de coordenadas, éstos serían: A(0,0,0), B(10,12,0), C(0,20,0) y D(5,6,20), estando las unidades expresadas en metros.

a) ***¿Cuál es la capacidad de este depósito?***
b) ***¿Qué altura alcanzará el agua en su interior cuando esté a 1/8 de si capacidad? (Se supondrá que la base es ABC)***

SOLUCIÓN:



a) El volumen de una pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} Areabase.altura$$

En nuestro caso, y haciendo uso de las propiedades del producto vectorial, el área de la base es

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 0 \end{pmatrix}\right|}{2}=100\ \mathrm{m}^2$$

Por otro lado el plano que contiene a A,B y C es z=0, con lo que la altura de la pirámide es la distancia desde D al plano z=0, es decir 20 m

Así pues el volumen de la pirámide es $\frac{2000}{3}$ m^3 = 6666,66 litros.

b) Llenamos el recipiente hasta 1/8 de su capacidad, quedando vacío un volumen correspondiente a 7/8 de la capacidad total, es decir que el volumen de la pirámide que está por encima del nivel del agua es $\frac{7}{8}.\frac{2000}{3}=\frac{1750}{3}$ m^3

Ahora es necesario observar las siguientes semejanzas de triángulos:

Es obvio que los triángulos AOC y A'O'C' son semejantes, es decir que se producen las siguientes identidades

$\frac{AC}{A'C'}=\frac{AO}{A'O'}=\frac{BH}{B'H'}=k$ (una constante de proporcionalidad)

Ahora bien, sabemos que $\frac{2000}{3}=\frac{1}{3}\frac{AC.BH}{2}.OD$, teniendo en cuenta que AC=20 y OD=20, resulta que BH=10

Por otra parte los triángulos AOD y A'O'D son semejantes, obteniéndose que

$\frac{AO}{A'O'}=\frac{OD}{O'D}$, es decir $k=\frac{20}{O'D}$ **(1)**

En el caso de la pirámide sin agua tenemos que

$\frac{1750}{3}=\frac{1}{3}\frac{A'C'.B'H'}{2}.O'D=\frac{1}{3}\frac{(AC/k).(BH/k)}{2}.O'D$, simplificando y teniendo en cuenta que BH=10 resulta que 175=$\frac{10}{k^2}.O'D$ **(2)**

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (2) se obtiene que $O'D=10\sqrt[3]{7}$, en consecuencia la solución al ejercicio, es decir la altura que alcanza el agua es O'O que es:

$$20-10\sqrt[3]{7}=0{,}870m$$

87 cm.

Ante la crisis del sector inmobiliario, la constructora PEPE SA replantea su esquema de trabajo para su próxima promoción de viviendas. La construcción en ésta de un número n de pisos (todos del mismo tipo) representa un coste en euros que sigue la función.

$$f(n) = 81.10^{4} + 10^{3}.n + 10^{2}.n^{2}$$

siempre que n verifique 8<n<200. Analizar:

- ***a)*** ***La evolución sobre una gráfica del coste de cada piso en función del número de pisos edificado.***
- ***b)*** ***Para que la construcción de cada piso le resulte lo más barato posible, ¿cuántos debe construir?***
- ***c)*** ***Si desea vender cada vivienda en 1.000.000 euros, ¿cuál es el mayor beneficio posible en cada piso?***

SOLUCIÓN:

a) Si el coste total de una vivienda de n pisos es f(n), entonces el coste por piso será f(n)/n, es decir:

$$F(n) = \frac{f(n)}{n} = 10^{2}\left(\frac{81.10^{2}}{n} + 10 + n\right)$$ cuya gráfica es una curva que para n=9 el precio de cada piso es 91900 euros y para 199 el precio asciende a 24970,35.

Derivando F se anula en n=90, alcanzándose un mínimo, es decir que si hiciésemos 90 pisos el precio de cada uno saldría a 19000 € y esos serían los que se deberían construir para que el piso saliese lo más económico posible con lo cual ya contestamos al apartado b)

b) Los costes de las viviendas vienen dadas por f(n) que es una función creciente en su dominio útil, por lo tanto la vivienda más barata ha de tener 9 pisos. Como para seguir abaratando costes nos interesa hacer 90 viviendas según el apartado b), deberemos hacer 10 viviendas de 9 pisos cada una.

Si las vendemos a 1000.000 de euros y cada vivienda, al tener 9 pisos, tiene un coste de f(9) = 827.100 euros, el beneficio en la vivienda es de 172.900 euros, que por piso nos sale en 19211,11 euros

Un suelo uniforme está pavimentado con 350 baldosas de igual tamaño y de colores blanco, azul y rojo. Si se lanza una bola pequeña sobre este suelo un gran número de veces, se observa que siempre cae sobre uno de los tres colores y la probabilidad de que lo haga sobre el blanco duplica a la de caer sobre el azul, mientras que ésta, a su vez, duplica al de caer sobre rojo:

a) Obtener el número de baldosas de cada color que forma el suelo.

b) Si se lanza la bola dos veces consecutivas, probabilidad de que caiga sobre distinto color cada vez.

(Se admite que la probabilidad de que la bola caiga sobre cualquier baldosa del suelo es la misma y que no puede caer en la unión de dos o más baldosas.)

SOLUCIÓN:

a) Sean los sucesos A=”caer en baldosa azul”, B=”caer en baldosa blanca”, C=”caer en baldosa roja”.

Si P(c)=x, entonces P(A)=2x y P(B)=4x. Como AUBUC es todo el espacio muestral, resulta que x+2x+4x=1, de donde x=1/7, así tenemos:
P(A)= 2/7 ; P(B)= 4/7; P(C)=1/7.
Número de bolas azules 350. 2/7 = 100 bolas azules
Número de bolas blancas 350. 4/7= 200 bolas blancas
Número de bolas rojas 350. 1/7 = 50 bolas rojas.

b) P(sean de distinto color) = 1- Probabilidad (ambas sean de igual color) =
1-P[AA U BB U RR) = 1 – [P(AA)+P(BB)+P(CC)]

Al ser cada lanzamiento de la bola independiente del anterior, se tiene que:
$P(AA) = P(A).P(A) = (2/7)^2$
Análogamente $P(BB) = (4/7)^2$ y $P(CC)= (1/7)^2$

$$P \text{ (ambas sean de igual color)} = 1 - \frac{21}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$$