PROBLEMAS RESUELTOS DE CONTRASTE DE HIPÓTESIS

1) *Un investigador quiere contrastar si el peso medio de ciertas hortalizas está en los 1,90 Kg. que le aseguran en el mercado. Suponiendo que este peso se distribuye de forma normal con desviación típica de 100 g, selecciona al azar 10 hortalizas observando los siguientes pesos (en Kg): 1,92 1,98 1,87 2,05 2,02 1,87 1,92 1,95 1,87 2,04. Contrastar, con un nivel de significación de 0,05, que stos datos se adecuan a una distribución con media 1,9 Kg.*

SOLUCIÓN:

Hipótesis nula H_o: $\mu_{o} = 1{,}9$ Kg.

Hipótesis alternativa H_1: $\mu_o < 1{,}9$ Kg.

Como se trata de un contraste paramétrico de la media y desconocemos la desviación típico, utilizaremos como estadístico de contraste:

$$d = \frac{\overline{X} - 1{,}9}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{10}}} \in t_9$$ que sigue una distribución t de Student con 9 grados de libertad

Teniendo en cuenta que n = 10 y que $\alpha = 0{,}05$, el intervalo de aceptación de nuestra hipótesis nula es $(-t_{9,\,0.05}\ ,\ +\infty)$. En las tablas hallamos $t_{9,\,0.05}$ cuyo valor es 1,8331. De este modo el intervalo de aceptación es I = (-1,83 , + ∞)

Ahora, y después de hallar la media y la cuasi desviación típica de la muestra que valen respectivamente 1,949 y 0,07 Kg, calculamos la medida de discrepancia para nuestra muestra utilizando el estadístico de discrepancia d, obteniéndose:

$$\hat{d} = \frac{1{,}949 - 1{,}9}{0{,}07 / 3{,}16} = 2{,}213$$ que es un valor contenido en el intervalo de

aceptación, por tanto debemos concluir que nuestra hipótesis nula es cierta con un nivel de significación de 0,05. Las hortalizas tienen en efecto una media de 1,9 Kg.

2) *Con los mismos datos del ejercicio anterior, contrastar que la desviación típica del peso de las hortalizas es de 100 gramos.*

SOLUCIÓN:

Cuidado con las unidades: Si vamos a trabajar con los datos en Kg, es fundamental considerar la desv. Típica como 0,1 Kg.

Pues bien, se trata de contrastar la desviación típica, lo que haremos contrastando la varianza ya que disponemos de un estadístico de discrepancia para ello que es:

$$d = \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \in \mathrm{X}_{n-1}^2$$ que sigue una distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.

En nuestro caso la hipótesis nula es H_0 : $\sigma_o^2 = 0{,}01$ y la alternativa es $H_1 : \sigma_0^2 \neq 0{,}01$

En la chi-cuadrado el intervalo de aceptación cuando la alternativa es bilateral, es

$I = (\mathrm{X}_{9,1-0.025}^2\ ,\ \mathrm{X}_{9,0.025}^2)$ que yendo a las tablas se corresponde con (2,7 , 19,023)

Ahora calculamos la medida de discrepancia en nuestra muestra, obteniéndose:

$$\hat{d} = \frac{9.0{,}00498}{0{,}01} = 4{,}489$$ que está en I. Por tanto se acepta que la varianza es 0,01 y por tanto la

desviación típica 0,1.

3) *Una empresa de teléfonos asegura que por termino medio realiza una instalación estándar en una casa en menos de 15 días con una desviación de dos días. Se seleccionan un total de 20 instalaciones realizadas por dicha empresa, resultando un tiempo medio de 14,2 días. Contrastar con un nivel de significación de 0,05 que el tiempo medio de cada instalación es inferior a los 15 días.*

SOLUCIÓN:

Hipótesis nula: : $\mu_{o=}$ 15 días

Hipótesis alternativa: : $\mu_o < 15$ días

Como se conoce que $\sigma = 2$ días, podemos realizar el contraste de la media con el estadístico siguiente: $d = \dfrac{\overline{X} - 15}{2/\sqrt{20}} \in N(0,1)$ que sigue una distribución normal

Teniendo en cuenta que $\alpha = 0{,}05$, el intervalo de aceptación, al ser la hipótesis alternativa lateral izquierda, es $(-z_{0,05}\,, +\infty)$. Vamos a la tabla de la normal y hallamos $z_{0,05,}$ sabiendo que $F(z_{0,05})$ = 1-0,05 = 0,95, por tanto $z_{0,05}$ = 1,64. Así pues el intervalo de aceptación es (-1,64, +∞)

Hallamos la medida de discrepancia para nuestra muestra de 20 elementos, resultando ser:

$d = \dfrac{14{,}2 - 15}{2/\sqrt{20}} = -1{,}78$ que se encuentra fuera del intervalo de aceptación por tanto rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la alternativa, con lo que si consideramos cierto la afirmación de que el promedio de las instalaciones se realiza en un plazo inferior a 15 días.

4) *El encargado de personal de una joyería sospecha que el peso de los torques de oro que fabrica un determinado trabajador fluctúa más de lo aconsejable, que corresponde a una desviación típica de 0,9 gramos. Para contrastar sus sospechas, observa 10 días elegidos al azar a dicho trabajador, obteniendo los siguientes pesos: 10,1 9,4 8,2 11,5 10,2 9,8 11,1 10,4 9,8 y 10,2. ¿Tiene apoyo la sospecha del encargado con un nivel de significación de 0,05?*

SOLUCIÓN:

Hipótesis nula $\sigma_o^2 = 0{,}81$, que es equivalente a que la desv. típica sea 0,9.

Hipótesis alternativa es $H_1 : \sigma_0^2 \neq 0{,}81$

Al tratar de contrastar la varianza, utilizamos como estadístico de contraste:

$d = \dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \in \mathrm{X}_{n-1}^2$; en nuestro caso $\widehat{d} = \dfrac{9.0{,}8156}{0{,}81} = 9{,}06$

Por otro lado, y dado que estamos ante una distribución chi-cuadrado con 9 grados de libertad, el intervalo de aceptación de la hipótesis nula es $I = (\mathrm{X}_{9,1-0.025}^2 \quad , \quad \mathrm{X}_{9,0.025}^2)$ para un nivel de significación de 0,05 que en las tablas nos da el siguiente resultado: (2,7 , 19,023). Como el valor de la medida de discrepancia de la muestra, 9,06, se encuentra en el intervalo, damos por buena la hipótesis de que la varianza es 0,81 por lo que no hay razones para sospechar de que la fluctuación sea anormal.

5) *Una máquina produce balas de calibre 9 mm, las fabrica con una desviación típica de 0,007. Para saber si el proceso funciona correctamente se taman muestras de 5 balas cada dos horas. Encontrar las condiciones para contrastar, con un nivel de significación de 0,05, que la desviación típica es menor de 0,007 y la media es de 9 mm. (lo que equivale, en terminos de control de calidad, a que la producción esté bajo control)*

SOLUCIÓN:
Para mantener la media en 9 mm, establecemos como hipótesis nula $\mu_{o=}$ 9 mm, siendo la alternativa $\mu_o \neq 9$ mm.

Utilizo como medida de discrepancia $d = \dfrac{\overline{X} - 9}{\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{5}}} \in t_4$, siendo el intervalo de aceptación el intervalo ($-t_{4,0.025}$, $t_{4,0.025}$) = (-2,77 , 2,77). Por tanto, para que la media se acepte como 9, d tiene que estar dentro del intervalo, lo cual quiere decir que:
-2,77<d<2,77, o equivalentemente

$$\vec{X} \in \left(9 - 2{,}77.\frac{S_{n-1}}{\sqrt{5}}, 9 + 2{,}77.\frac{S_{n-1}}{\sqrt{5}}\right) = (9 - 1{,}24 S_{n-1} \text{ , } 9 + 1{,}24 S_{n-1})$$

Para la desviación típica establezco como hipótesis nula nula $\sigma_o^2 = 0{,}007^2 = 0{,}000049$ y alternativa $\sigma_o^2 < 0{,}000049$

$d = \dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \in \mathrm{X}_{n-1}^2$. En nuestro caso el intervalo de aceptación sería

$$I = (\mathrm{X}_{4,1-0.025}^2, +\infty) = (0{,}48; +\infty)$$

Como queremos que en el contraste la desviación típica sea menor que 0,007, esto implica que a su vez la varianza sea menor que 0,000049 y por tanto el valor de discrepancia muestral no esté en el intervalo de aceptación, por lo que d ha de ser menor que 0,48.

Esto es: $\dfrac{4.S_{n-1}^2}{0{,}000049} < 0{,}48$ de donde se sigue que $S^2_{n-1} < 0{,}000588$, de donde $S_{n-1} < 0{,}0024$

6) *Un hospital sostiene que el número de infectados en intervenciones quirúrgicas en sus quirófanos no sobrepasa el 12%. Se realiza un control sobre 300 enfermos intervenidos en dicho hospital de los cuales 45 si fueron infectados. ¿Es coherente la afirmación del hospital con 1% de significación?*

SOLUCIÓN: Estamos ante un contraste de proporción.
Hipótesis nula $p_o = 0{,}12$. Hipóteis alternativa $p_o > 0{,}12$

Estadístico de contraste: $d = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \in N(0,1)$. Para $\alpha = 0{,}01$, resulta que el intervalo de aceptación es $(-\infty , z_{0,01})$. Si vamos a la tabla de la normal encontramos que el intervalo en cuestión es $(-\infty , 2{,}33)$ y nuestro estadístico de contraste en nuestra muestra nos da:

$$\widehat{d} = \frac{0{,}15 - 0{,}12}{\sqrt{\dfrac{0{,}12.0{,}88}{300}}} = 1{,}59$$ que está en nuestro intervalo de aceptación por lo que aceptamos la hipótesis nula.

7) *Un proveedor de planchas para la construcción de embarcaciones suministra material a un astillero asegurando que la resistencia a tracción de este material cumple la normativa de calidad, que establece una media de 120 Mpa (Megapascales) con una desviación típica de 3,7 Mpa. Se toma una muestra al azar de 9 planchas de este proveedor y se someten a una prueba de resistencia resultando los siguientes valores: 115, 120, 105, 130, 114, 118, 109, 107, 130. Contrástense las hipótesis oportunas con un nivel de confianza del 99%*

SOLUCIÓN:
Para la media establecemos hipótesis nula $\mu_{o=}$ 120 Mpa. y alternativa $\mu_o <$ 120 Mpa

Utilizamos $d = \dfrac{\overline{X} - 120}{\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{9}}} \in \; t_8$ El intervalo de aceptación es $(-t_{8,0.01}\,,\,{}_{+}\infty) = (-2{,}8965\,,\,{}_{+}\infty)$

Como la media muestral vale 116,44 y la cuasi desviación típica muestral es 9,125, por lo que el valor de dispersión de nuestra muestra es:

$\hat{d} = \dfrac{116{,}44 - 120}{\dfrac{9{,}125}{3}} = -1{,}17$ que está en nuestro intervalo, por lo que aceptamos el valor medio de 120 como válido.

Para la varianza, la hipótesis nula es σ_o^2 = 13,69 y la alternativa es $\sigma_o^2 \neq 13{,}69$, utilizando el estadístico de dispersión $d = \dfrac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \in \mathrm{X}_{n-1}^2$

El valor para nuestra muestra es $\hat{d} = \dfrac{8.83{,}265}{13{,}69} = 48{,}65$

El intervalo de aceptación, tomando la chi-cuadrado con 8 grados de libertad para un valor de nivel de significación de 0,001 es: $I = (\mathrm{X}_{8,1-0.005}^2 \quad , \quad \mathrm{X}_{8,0.005}^2) =$ (1,3444 , 21,95). Claramente nuestro valor está fuera por lo que no podemos aceptar la hipótesis para la desviación típica.

8) *Un investigador asegura tener encontrado un medicamenteo que reduce el nivel de colesterol total. Aplicado a 9 pacientes se obtuvieron los siguientes resultados, medido en mg/100ml, para antes y después de ser aplicado el medicamento:*

Antes	215	220	205	230	214	218	209	207	230
Desp.	218	217	209	217	221	224	219	221	207

Contrastar si las diferencias son significativas con un nivel de confianza del 99%

SOLUCIÓN:
Sea la variable X = Valores después – Valores antes, obteniéndose los siguientes valores:
3 , -3, 4, -13, 7, 6, 10, 14 –23
Hipótesis nula $\mu_{o=}$ 0. y alternativa $\mu_o < 0$
S_{n-1} = 11,78 y la media muestral es 0,555

El valor del estadístico en la muestra es $\hat{d} = \dfrac{0{,}555 - 0}{\dfrac{11{,}78}{3}} = 0{,}14$, siendo α = 0,01 y teniendo en cuenta que el estadístico utilizado es una t-Student con 8 grados de libertad, el intervalo de aceptación es $(-t_{8,0.01}\,,\,+\infty) = (-2{,}896\,,\,,\,+\infty)$. Nuestro valor está dentro con lo cual se acepta la hipótesis nula de donde se deduce que las diferencias no son significativas y el medicamento no es eficiente.

9) *El responsable de una campaña electoral piensa que su candidato está en desventaja frente a su rival político, por lo que decide hacer una encuesta a 1500 electores, resultando que 720 votarían a su candidato y el resto al otro. ¿Existen razones para pensar que este candidato está en desventaja frente a su oponente con un nivel de significación del 1%?*

SOLUCIÓN:
Como se trata de contrastar si va a tener menos del 50% de los votos, la hipótesis nula sería $p_0 = 0,5$ y la alternativa $p_0 < 0,5$.
Utilizamos el estadístico de contraste para las proporciones:

$d = \dfrac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{1500}}}$ siendo $\widehat{p} = 720/1500 = 0,48$, por tanto el valor del estadística en nuestra muestra es $\widehat{d} = -1,55$. Por otra parte, y dado que $\alpha = 0,01$, el intervalo de aceptación de la hipótesis nula es $(-z_{0,01}, +\infty)$. En la tabla de la normal, resulta que teniendo en cuenta que valor de $F(z_{0,01}) = 0,99$, resulta que $z_{0,01} = 2,33$, resultando que el intervalo de aceptación es $(-2,33 , +\infty)$. Nuestro valor muestral se encuentra dentro, por lo que se acepta la hipótesis nula y no se puede inferir que el candidato está en desventaja con su rival.

10) *Queremos contrastar si el porcentaje de desempleo en la comarca de Ferrol es mayor que en la del resto de Galicia que están en el 15%. Tomando una muestra al azar de 500 personas de dicha comarca se obtuvieron 95 desempleados. ¿Existen razones para sospechar que hay diferencia entre esta comarca y el resto de Galicia?*

SOLUCIÓN:
Hipótesis nula $p_0 = 0,15$, Hipótesis alternativa $p_0 > 0,15$. Hay que contrastar una proporción de forma análoga al problema anterior, por lo que usamos el mismo estadístico, siendo $\widehat{p} = 95/500 = 0,19$, mientras que el valor de $\widehat{d} = 2,50$. Utilizamos la normal para averiguar el intervalo de aceptación que, en este caso como la hipótesis alternativa es lateral derecha, es $(-\infty , z\alpha)$. Si $\alpha = 0,05$, el intervalo es $(-\infty , 1,65)$. Como 2,5 está fuera hemos de decir que, con un 5% de nivel de significación rechazamos la hipótesis nula y por tanto podemos afirmar que si hay mayor paro en la comarca de Ferrol
Si $\alpha = 0,01$, el intervalo es $(-\infty , 1,65)$. Ocurre otro tanto.

11) *Un profesor de matemáticas quiere demostrar que la nota media de selectividad del alumnado de su materia es superior a la media gallega, que estaba en 5,5 en la última prueba. Elige una muestra al azar de 25 alumnos presentados a selectividad en la última convocatoria resultando una media de 5,95 con una cuasi desviación muestral de 0,92. Verificar la afirmación de este profesor conun nivel de confianza de un 95%*

SOLUCIÓN:
Hipótesis nula: $\mu_o = 5,5$. Hipótesis alternativa: $\mu_o > 5,5$. Al no conocer la desviación típica debemos utilizar el estadístico $d = \dfrac{\widehat{X} - 5,5}{0,92/\sqrt{25}}$ por lo que $\widehat{d} = \dfrac{5,95 - 5,5}{0,184} = 2,4456$.

Calculamos el intervalo de aceptación que es $(-\infty , t_{24,0.05}) = (-\infty , 1,71)$. Nuestro valor está fuera del intervalo por tanto se desprende que la nota media de sus alumnos en efecto es superior a la media ya que tenemos que rechazar la hipótesis nula.

12) *Una maternidad está interesada en contrastar si la estatura media de los niños al nacer es de 50 cm, fijando como criterio de aceptación de esta afirmación que la media muestral se desvía de los 50 cm en menos de 1,5 cm. Suponiendo que se toma como desviación típica poblacional de la estatura 2,5 cm y una muestra de tamaño 10, calcular la probabilidad de cometer un error de tipo I.*

SOLUCIÓN:
El error tipo I es el cometido cuando en la muestra rechazamos la hipótesis nula cuando esta es cierta.

Dado que en nuestro ejercicio la hipótesis nula se acepta cuando el valor de $\widehat{X}$ se encuentra en el intervalo (48,5 ; 51,5), la probabilidad pedida es:

$$P(\widehat{X} < 48{,}5 / \mu = 50) + P(\widehat{X} > 51{,}5 / \mu = 50) =$$

Como en el contraste utilizamos el estadístico $d = \dfrac{\widehat{X} - 50}{2{,}5 / \sqrt{10}} \in N(0{,}1)$, tipificamos los valores obteniéndose P(Z<-1,89)+P(Z>1,89) = F(-1,89)+1-F(1,89) = 1-F(1,89)+1-F(1,89) = 2 – 2. 0,9706 = 0,0588

13) *Con los datos del problema anterior y suponiendo que se quiere rechazar la hipótesis nula si la media fuese de 52 cm. ¿Cuál será la probabilidad de cometer un error de tipo II?*

SOLUCIÓN:
Como el error del tipo II consiste en aceptar la hipótesis nula, siendo esta falsa. Tenemos que la probabilidad de que esto ocurre es: $P(48{,}5 < \widehat{X} < 51{,}5 / \mu = 52) = P(-4{,}42 < Z < -0{,}63) = 0{,}2643$. Téngase en cuenta que la tipificación ahora se efectúa en base a: $d = \dfrac{\widehat{X} - 52}{2{,}5 / \sqrt{10}} \in N(0{,}1)$